

I GODINA

2003. Opštinsko takmičenje

Први разред – А категорија

1. Нaђи највећи заједнички делилац бројева $\underbrace{11111111}_8$ и $\underbrace{111\dots11}_{100}$.
2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ћака, а у селу B 50 ћака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ћаци прелазе у току једног дана буде најмањи?
3. Нека су a , b и c странице троугла и

$$p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.$$

Доказати да је $|p - q| < 1$.

4. Дијагонала AC четвороугла $ABCD$ уписаног у круг је пречник тог круга. Доказати да су пројекције страница AB и CD на дијагоналу BD једнаке.
5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

2003. Opštinsko takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Испитати када израз $(n - 2)^3 + n^3 + (n + 2)^3$, $n \in \mathbb{N}$ није делив са 18.
2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ћака, а у селу B 50 ћака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ћаци прелазе у току једног дана буде најмањи?
3. Бува се налази у координатној равни. Из тачке (m, n) бува може да скочи у једну од тачака (n, m) , $(m - n, n)$ или $(m + n, n)$. Да ли бува може да дође у тачку $(12, 32)$ ако се на почетку налази у тачки:
а) $(7, 12)$; б) $(8, 12)$?
4. Познато је да су сви Плинкови Планкови и да су неки од Плонкови Плинкови. Који искази морају бити тачни:
а) "Неки Планкови су Плонкови."
б) "Неки Плинкови нису Плонкови."
в) "Ниједан Плонк није Планк."
5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

2003. Okružno takmičenje

Први разред – А категорија

1. Нека је k природан број. Доказати да број $2^{2k-1} + 2^k + 1$ није дељив са 7.
2. У скупу целих бројева решити једначину

$$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n.$$

3. Доказати да за свако $n \geq 2$ постоји n различитих природних бројева, таквих да је збир њихових квадрата квадрат природног броја.
4. Нека су t_a и t_b тежишне дужи, које одговарају страницама BC и CA троугла ABC , а P његова површина. Доказати да важи

$$t_a \cdot t_b \geq \frac{3}{2}P.$$

Када важи једнакост?

5. У равни су дате две тачке и права. Конструисати троугао ABC , код кога су те две тачке средишта страница BC и CA , а висина из темена A припада датој правој.

2003. Okružno takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Нека је n природан број. Доказати да је број $8n^3 - 12n^2 + 6n + 63$ сложен.
2. Нека је четвороугао $ABCD$ и тетивни и тангентни. Ако је разлика страница AD и BC једнака разлици страница AB и CD , доказати да је AC пречник круга описаног око четвороугла $ABCD$.
3. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Познато је да се разломак $\frac{3n - m}{5n + 2m}$ може скратити неким природним бројем. Наћи број којим се овај разломак може скратити.
4. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за коју важи $f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$ за свако $x \in \mathbb{R}$ није инјективна (тј. постоје $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ такви да $f(x_1) = f(x_2)$).
5. У равни су дата два скупа паралелних правих a_1, a_2, \dots, a_{13} и b_1, b_2, \dots, b_7 . Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је паралелограма одређено овим правама?

2003. Republičko takmičenje

Први разред – А категорија

1. Нека су x и y ненегативни реални бројеви такви да је $x + y = 2$.
Доказати да важи

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Када важи једнакост?

2. Дат је број 2^k , $k > 3$. Доказати да се пермутацијама цифара овог броја не може добити број 2^n , где је $n > k$.
3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.
4. Кружница која је уписана у троугао ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама M и N . Нека је P тачка пресека симетрале угла $\angle ABC$ и праве MN . Доказати да је површина троугла ABC два пута већа од површине троугла ABP .
5. На страницама BC , CA и AB троугла ABC уочене су тачке A_1, B_1 и C_1 , редом. Нека је T тежиште троугла ABC , а T_1 тежиште троугла $A_1B_1C_1$. Доказати да је $T \equiv T_1$ ако и само ако је

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

2003. Republičko takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне x и y важи

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1.$$

Када важи једнакост?

2. Наћи најмањи природан број који је четири пута мањи од броја написаног истим цифрама, али у обрнутом поретку.
3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.
4. Ако су x, y, z, u природни бројеви већи од 1, такви да важи $xy = zu$, доказати да је број

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$$

сложен природан број.

5. Дат је полукруг над пречником AB и на њему тачке C и D тако да је $\angle CSD$ прав, где је S средиште дужи AB . Нека је E пресек правих AC и BD , а F пресек правих AD и BC . Доказати да је $EF \perp AB$ и $EF = AB$.

2004. Opštinsko takmičenje

Први разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произволна тачка E различита од A и C . Нека су N и M тачке правих AB и BC , редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN . Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.
2. Природни бројеви a, b и c су такви да су бројеви $p = b^c + a$, $q = a^b + c$ и $r = c^a + b$ прости. Доказати да су два од бројева p, q, r међусобно једнаки.
3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.
4. На колико начина можемо распоредити m различитих птица у n различитих кавеза тако да сваки кавез садржи бар једну, или највише две птице?
5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004 . Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

2004. Opštinsko takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Цифре a и b су различите и такве да важи
$$\overline{aa} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{ab} = \overline{abaaba}.$$
Дешифровати ову једнакост.
2. У троуглу ΔABC ($BC > CA$) је $\angle CAB - \angle ABC = 45^\circ$. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD = CA$, израчунати величину угла $\angle BAD$.
3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.
4. Колико има једнакокраких троуглова, чије су странице целобројне, а обим једнак 30cm ?
5. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

2004. Okružno takmičenje

Први разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, дужине страница су три узастопна природна броја. Ако је тежишна линија повучена из A нормална на симетралу угла $\angle ABC$, пронаћи дужине страница троугла.
2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Нека су A_1 , B_1 и C_1 , редом, центри описаних кругова троуглова $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHB$. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни.
3. Посматрајмо коначан низ од 2003 броја, при чему је $a_n = \left[\frac{n^2}{2004} \right]$, $n = 1, 2, \dots, 2003$. Колико различитих чланова садржи тај низ?
4. Да ли постоји полином са целобројним коефицијентима такав да важи:
а) $P(7) = 8$ и $P(15) = 12$;
б) $P(8) = 7$ и $P(12) = 15$?
5. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пацова, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за само k од тих 7 објекта. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пацова са мишем или сиром пацов ће их појести. Ако остави мачку са пацом или мишем она ће их појести. Ако остави пса са пацом или мачком он ће их убити. Ако остави вука са пском или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са пском или вуком он ће их убити. Претпоставља се да трговац све ове догађаје спречава да се десе кад је присутан. Које минимално k гарантује да он може све артикле безбедно да пребаци на другу страну реке?

2004. Okružno takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је $n^n - n$ делјиво са 24 за све непарне природне бројеве n .
2. Нека је S пресек, међусобно управних, дијагонала AC и BD конвексног и тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови дуж AD .
3. У троуглу $\triangle ABC$ за унутрашње углове важи $\alpha - \beta = 2\gamma$.
 - а) Доказати да је угао α туп.
 - б) На правој AB , иза тачке A у односу на тачку B , је дата тачка E таква да је $EC = AC$. Доказати да је CA симетрала угла $\angle ECB$.
4. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + 2f(1-x) = x$. Одредити $f(x)$.
5. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?

2004. Republičko takmičenje

Први разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, дужине страница су три узастопна природна броја. Ако је тежишна линија повучена из A нормална на симетралу угла $\angle ABC$, пронађи дужине страница троугла.
2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Нека су A_1 , B_1 и C_1 , редом, центри описаних кругова троуглова $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHB$. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни.
3. Посматрајмо коначан низ од 2003 броја, при чему је $a_n = \left[\frac{n^2}{2004} \right]$, $n = 1, 2, \dots, 2003$. Колико различитих чланова садржи тај низ?
4. Да ли постоји полином са целобројним коефицијентима такав да важи:
а) $P(7) = 8$ и $P(15) = 12$;
б) $P(8) = 7$ и $P(12) = 15$?
5. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пацова, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за само k од тих 7 објекта. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пацова са мишем или сиром пацов ће их појести. Ако остави мачку са пацом или мишем она ће их појести. Ако остави пса са пацом или мачком он ће их убити. Ако остави вука са пском или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са пском или вуком он ће их убити. Претпоставља се да трговац све ове догађаје спречава да се десе кад је присутан. Које минимално k гарантује да он може све артикле безбедно да пребаци на другу страну реке?

2004. Republičko takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је $n^n - n$ делјиво са 24 за све непарне природне бројеве n .
2. Нека је S пресек, међусобно управних, дијагонала AC и BD конвексног и тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови дуж AD .
3. У троуглу $\triangle ABC$ за унутрашње углове важи $\alpha - \beta = 2\gamma$.
 - а) Доказати да је угао α туп.
 - б) На правој AB , иза тачке A у односу на тачку B , је дата тачка E таква да је $EC = AC$. Доказати да је CA симетрала угла $\angle ECB$.
4. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + 2f(1-x) = x$. Одредити $f(x)$.
5. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?

2004. Savezno takmičenje

Први разред

1. Нади све парове природних бројева (a, b) за које важи:

$$5a^b - b = 2004.$$

2. Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачке D и E редом на полуправама CB и CA , тако да важи $CD = CE = \frac{AC + BC}{2}$. Нека је H ортоцентар троугла ABC и P средиште лука AB кружнице описане око троугла ABC , који не садржи тачку C . Доказати да права DE полови дуж HP .
3. Ако су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $abc = 1$, доказати да је

$$\sqrt{\frac{1}{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{1}{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{1}{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

4. У простору је дат скуп S од 100 тачака, тако да никоје 4 од њих не припадају једној равни. Доказати да не постоји више од $4 \cdot 101^2$ тетраедара са теменима из скупа S , таквих да свака два од тих тетраедара имају највише два заједничка темена.

2005. Opštinsko takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB \parallel DE$. Нека су M, P, N и Q редом средишта страница BC, CD, EF и FA , а K и L редом средишта дужи MN и PQ . Доказати да се тачке K и L поклапају ако и само ако је $AB = DE$.
2. Тетиве AB и AC круга k су једнаке, а тетива AD сече BC у тачки E . Доказати да је $\angle BEA = \angle ABD$.
3. Видети 3. задатак за први разред А категорије.
4. Одредити све природне бројеве a и b такве да број $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}$ буде рационалан.
5. Видети 5. задатак за први разред А категорије.

2005. Okružno takmičenje

Први разред – Б категорија

1. Видети 1. задатак за први разред А категорије.
2. Видети 2. задатак за први разред А категорије.
3. Наћи троцифрен број \overline{abc} ако је четвороцифрен број \overline{abcl} три пута већи од четвороцифрених броја $2abc$.
4. Колико има има дијагонала конвексног 15-тоугла које спајају по два његова темена између којих се (посматрано у оба могућа смера) налазе бар три друга темена?
5. Висина AD из темена A троугла $\triangle ABC$ дели страницу BC у односу $BD : DC = 3 : 1$. Ако је $\angle ABC = 30^\circ$, доказати да је троугао $\triangle ABC$ правоугли.

2005. Republičko takmičenje

Први разред – А категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2005?
2. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао са $AB = AC$. Дата је тачка D на страници AC , таква да је $CD = 2AD$ и тачка P на дужи BD . Ако је $\angle APC = 90^\circ$, доказати да је $\angle ABD = \angle PCB$.
3. Нека су A_1, A_2, \dots, A_{501} произвољне, међусобно различите тачке у равни. Доказати да на било којој кружници полупречника 4 постоји тачка M за коју је испуњено да је збир дужина дужи $MA_1, MA_2, \dots, MA_{501}$ већи или једнак 2004.
4. За реалне бројеве a и b доказати следећу неједнакост:
$$a(1+b^2) + b(1+a^2) \leq (1+a^2)(1+b^2).$$
5. На табли је написано 2005 јединица. Дозвољено нам је да избришемо два од записаних бројева и уместо њих напишемо четвртишу њихове суме. Овај поступак понављамо док на табли не остане само један број. Доказати да последњи преостали број није мањи од 1/2005.

2005. Republičko takmičenje

Први разред - Б категорија

1. Видети 1. задатак за први разред А категорије.
2. Нека су A_1, B_1, C_1 редом пресечне тачке симетрала унутрашњих углова из темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са описаним кругом око троугла $\triangle ABC$. Доказати да је центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ ортоцентар троугла $\triangle A_1B_1C_1$.
3. Нека су a, b и c различити цели бројеви. Показати да је и $m = \frac{a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$ такође цео.
4. Доказати да се број $\underbrace{11\dots11}_{2005} \underbrace{22\dots22}_{2005}$ може написати као производ два узастопна природна броја.
5. Квадрат 2×2 подељен је на 4 квадратића 1×1 . Сваки од квадратића је обложен црвеном, плавом или белом бојом.
 - а) Колико има различитих бојећа?
 - б) Колико има различитих бојећа у којима се све три боје појављују?

2006. Opštinsko takmičenje

Први разред – А категорија

1. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?
2. Одреди највећи заједнички делилац бројева $2^{2006} - 1$ и $2^{2004} - 1$.
3. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (M388)
4. Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла па основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици. (M362)
5. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (M327)

Први разред – Б категорија

1. Одредити број деветоцифрених бројева деливих са 225, код којих су све цифре различите а цифра стотина им је 7. (Тап36, стр. 26)
2. На колико начина се 3 топа могу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?
3. Нека је $S = \{a, b, c\}$. Колико има функција $f : S \rightarrow S$ за које важи $f(f(x)) = x$?
4. Наћи све парове реалних бројева (x, y) који задовољавају једначине (M324)
$$|x + y - 4| = 5, \quad |x - 3| + |y - 1| = 5.$$
5. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (M388)

2006. Okružno takmičenje

Први разред – А категорија

1. Доказати да кружница која садржи два темена и ортоцентар троугла има исти полупречник као и кружница описана око тог троугла.
2. Наћи највећи природан број који је мањи од збира квадрата својих цифара.
3. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да у сваком начину путовања сваки део пута је пређен највише једанпут?

4. Шта је веће:

$$\frac{1, \overbrace{111\dots 1}^{2005 \text{ цифара}}}{1, \overbrace{111\dots 1}^{2006 \text{ цифара}}} \text{ или } \frac{1, \overbrace{0101\dots 01}^{4010 \text{ цифара}}}{1, \overbrace{0101\dots 01}^{4012 \text{ цифара}}}?$$

5. У свако поље таблице 8×8 написан је број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни? (Тангента 36, стр 4, зад. 4)

Први разред - Б категорија

1. Наћи највећи природан број који је мањи од збира квадрата својих цифара.
2. Ради продаје, било је потребно неке од датих 555 парцела поделити на мање. Притом се свака појединачна парцела могла поделити или на 3 или на 4 дела. Са дељењем парцела сестало када је број парцела био 4 пута већи од броја извршених деоба. Колико је најмање деоба извршено?
3. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Тачке P и Q су средине страница AD и BC . Ако важи да је $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$ доказати да је четвороугао $ABCD$ трапез.
4. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Нека је $AD \cap BC = \{H\}$ и $CD \cap AB = \{E\}$. Симетрала угла $\angle DEA$ сече странице DA и CB у тачкама P и M , а симетрала угла $\angle DHC$ сече странице DC и BA у тачкама N и L . Доказати да је $LMNP$ ромб. (M367)
5. У свако поље таблице 8×8 написан је број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни? (Тангента 36, стр 4, зад. 4)

2006. Republičko takmičenje

Први разред – А категорија

1. Ако су \mathcal{A} и \mathcal{B} непразни подскупови равни α , такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова \mathcal{A} или \mathcal{B} .
2. Наћи сва целобројна решења једначине

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + 2z = 2004.$$

3. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг полу пречника r . Ако је $AB = BC = DE = r$, доказати да је троугао BGF једнакостратичан, при чему су G и F средишта страница CD и EA петоугла.
4. Од свих троуглова једнаког обима највећу површину има једнакостратичан троугао. Доказати.
5. За неки природан број n , $n > 3$, нека је S збир цифара броја $1+2+\dots+n$. Ако у декадном запису броја S учествују све исте цифре, која цифра то може бити?

Први разред – Б категорија

1. Доказати да $n^2 + 5n + 6$ ни за један природан број n није тачан квадрат.
2. Ако су \mathcal{A} и \mathcal{B} непразни подскупови равни α , такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова \mathcal{A} или \mathcal{B} .
3. а) Доказати да број $n^2 + n + 1$ није делјив са 2006 ни за један природан број n .
б) Доказати да број $n^2 + n + 2$ није делјив са 2007 ни за један природан број n .
4. Дат је троугао ABC у коме важи $\angle C = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$. Нека је M средиште странице BC . Круг са центром у A и полу пречником AM сече, опет, праву BC у D . Доказати да је $MD = AB$.
5. Кружница уписана у троугао ABC додирује његове странице AB , BC и CA у тачкама M , N и K редом. Права кроз тачку A , паралелна са NK , сече праву NM у тачки D . Права кроз тачку A , паралелна са NM , сече праву NK у тачки E . Доказати да права DE садржи средњу линију троугла ABC (М395).

2007. Opštinsko takmičenje

Први разред – А категорија

1. Аутомобил креће из места A константном брзином по правом путу. Сваких 15 мишута ауто скреће под углом од 90 степени лево или десно. Доказати да се ауто може вратити у место A само после целог броја сати.

2. (M504) Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned}x - y &= 2005 \\[x] + [y] &= 2007.\end{aligned}$$

3. (M539) На симетралама $\angle BAC$ троугла ABC уочене су тачке B_1 и C_1 такве да је $BB_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AC$. Нека је M средиште дужи B_1C_1 . Доказати да је $MB = MC$.

4. За природне бројеве a, b и c важи $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{4016}{2007}$. Доказати да је

$$\frac{1}{c + \frac{1}{b+\frac{1}{a}}} = \frac{2007}{4016}.$$

5. Одредити на колико начина можемо факторисати број 441000 на два фактора m и n , тако да је $m > 1$, $n > 1$, и $\text{НЗД}(m, n) = 1$, при чему редослед фактора није битан (тј. производи $m \cdot n$ и $n \cdot m$ представљају исто факторисање).

Први разред – Б категорија

1. Страница правоугаоника BC два пута је већа од странице AB . Нека је па страници BC задата тачка M тако да су углови $\angle AMB$ и $\angle AMD$ једнаки. Израчунати те углове.

2. Колико има петоцифрених бројева који имају тачно једну цифру 6?

3. (M504) Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned}x - y &= 2005 \\[x] + [y] &= 2007.\end{aligned}$$

6

4. Збир цифара броја x једнак је y , а збир цифара броја y једнак је z .
Одредити x ако је $x + y + z = 60$. Тангента, M404

5. Одредити две последње цифре броја 9^{9^9} . Тангента, M505

2007. Okružno takmičenje

Први разред – А категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.

Тангента 38/2, стр. 41

2. Дата су два круга који се додирују изнутра у тачки A . Ако се из друге крајње тачке B пречника AB спољашњег круга конструише права која додирује унутрашњи круг у тачки C и сече спољашњи круг у тачки D , доказати да је права AC бисектриса угла BAD .

3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији $(2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5)$ десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа $\{1, 2, \dots, 8\}$ које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

4. Уз претпоставку $0 < b \leq a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима пека од неједнакости прелази у једнакост.

5. У зависности од природног броја n наћи највећи заједнички делилац бројева $n^2 + 1$ и $(n+1)^2 + 1$.

2007. Republičko takmičenje

Први разред – А категорија

1. Дијагонале AC и CE правилног шестоугла $ABCDEF$ подељене су тачкама M и N тако да је $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Одредити λ ако су тачке B, M и N колинеарне.
2. Дате су три неколинеарне тачке A, B и C . Конструисати тачку D тако да четвороугао $ABCD$ буде тетиван и тангентан.
3. За сваки природан број обележимо са x_n број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (ипр. $x_{15} = 123456789101112131415$). Одредити све природне бројеве n за које 27 дели $x_n^2 + x_n - 2$.
4. Одредити минималну вредност израза xyz при ограничењима

$$\begin{aligned}xy(10x + 10y + 7z) &\geq 27, \\yz(10y + 10z + 7x) &\geq 27, \\zx(10z + 10x + 7y) &\geq 27, \\x, y, z &\geq 0.\end{aligned}$$

5. У равни троугла ABC уочимо n правих, од којих је свака паралелна некој страници троугла. За које најмање n је могуће да ових n правих деле раван на бар 207 области (ограничених и неограничених)?

2008. Opštinsko takmičenje

Први разред, А категорија

1. Одредити да ли је број $10^{5^{10}} + 5^{10^{5^5}}$ делјив са 11.
2. Одредити све вредности реалног параметра a , за које једначина

$$|||x - 1| - 2| - 3| = a$$

има највећи могући број решења.

3. Ана и Ола су једног дана шетале (по најкраћем путу) до својих момака Косте и Лазе. Оне су се среле у хладу једног старог дрвета. Том приликом су приметиле да се Ољин момак Лаза налази тачно па пола пута који Ана прелази до цркве, да се Анин момак Коста налази тачно па средини пута од банке до цркве, да је банка од Ољине куће једнако удаљена као црква од Анише и да је растојање између банке и цркве једнако растојању између Анише и Ољине куће, али да се банка налази са десне стране када Ана из своје куће гледа Ољу па балкону њене куће. Договориле су се да се у повратку у 7 увече попово сретну испод истог дрвета. Да би Ана стигла на време замолила је Косту да јој израчуна које је растојање између његове куће и старог дрвета. Он зна да растојање између његове и Анише куће износи $2km$. Колики ће пут Ана прећи од Костиће куће до старог дрвета?
4. Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана. Сваког дана израсте иста количина траве.
 - (а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?
 - (б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?
5. На полици се налази 14 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 књига тако да никоје две изабране књиге пису суседне?

Први разред, Б категорија

1. Колико има петоцифрених бројева записаних чепарним цифрама, међу којима је бар једна јединица?
2. Одредити све просте бројеве p такве да је $5p+1$ квадрат природног броја.
3. У xy -равни одредити површину фигуре ограничено линијом

$$|x + 1| + |y - 2| = 3.$$

4. Видети први задатак за први разред А категорије.
5. Видети четврти задатак за први разред А категорије.

2008. Okružno takmičenje

Први разред, А категорија

1. Кроз пресечне тачке A и B кружница k_1 и k_2 конструисане су две паралелне праве које по други пут секу кружницу k_1 у тачкама C и D , а кружницу k_2 у тачкама E и F . Доказати да је $CD = EF$.
2. (а) На колико начина се могу изабрати два несуседна двоцифрене броја?
(б) Колико има петоцифрених бројева у којима се цифра 5 појављује тачно два пута и чије су преостале три цифре различити елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$?
3. Колико се пајвише топова може поставити на „шаховску” таблу димензија 5×4 , тако да сваки топ „напада” пајвише једног од преосталих? (Неки топ „напада” све топове који су у врсти у којој се и он налази, као и све топове који су у колони у којој се он налази.)
4. За $x, y, z \in \mathbb{Z}$ важи

$$x^2z + y^2x + z^2y = x^2y + y^2z + z^2x + x + y + z.$$

Доказати да $27 | x + y + z$.

5. Нека је $\triangle ABC$ такав да је $AB = 3$, $BC = 4$ и $CA = 2$. Наћи изломљену линију XYZ са крајевима X, Z на рубу $\triangle ABC$, такву да је $XY = YZ = 1$ и која дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина.

Први разред, Б категорија

1. Колико има петоцифрених бројева записаних пепарним цифрама, међу којима је бар једна једицица?
2. Одредити све просте бројеве p такве да је $5p+1$ квадрат природног броја.
3. У xy -равни одредити површину фигуре ограниченој линијом

$$|x + 1| + |y - 2| = 3.$$

4. Видети први задатак за први разред А категорије.
5. Видети четврти задатак за први разред А категорије.

2008. Republičko takmičenje

Први разред, А категорија

1. Одредити на колико начина се могу изабрати природни бројеви a , b и c тако да важи:
 - 1° $a < b < c < 52$;
 - 2° a дели c ;
 - 3° b дели c ;
- 4° a и b пису деливим квадратом природног броја већег од 1;
- 5° c јесте делив квадратом природног броја већег од 1.
2. У троуглу ABC је $\angle ABC = 45^\circ$ и $\angle CAB = 15^\circ$. Нека је M тачка на полуправој BC таква да је $\overline{BM} = 3 \cdot \overline{BC}$. Одредити углове троугла ABM .
3. Одредити остатак при дељењу полинома $x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$ полиномом $(x - 1)^3$.
4. Око троугла ABC описати једнакостраничан троугао PQR највеће могуће дужине странице ($\triangle PQR$ је описан око $\triangle ABC$ ако је $A \in QR$, $B \in RP$, $C \in PQ$).
5. Доказати да постоји природан број n такав да је број $2p^n + 3$ сложен за сваки прост број p .

Први разред, Б категорија

1. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да је број $(a + b)^6 - a^6$ делив бројем $a^2 + ab + b^2$.
2. Доказати да је број $3^{105} + 4^{105}$ делив са $49 \cdot 181$.
3. Нека је P тачка у унутрашњости $\triangle ABC$, таква да је $\angle PAC = \angle PBC$. Нека су M и K подножја нормала из тачке P на странице BC и AC , редом. Ако је D средиште странице AB , доказати да је $DK = DM$.
4. Видети други задатак за први разред А категорије.
5. Капетан је добио задатак да распореди 12 војника (различитих по висини) у 3 врсте по 4 војника, тако да су испуњени следећи услови:
 - 1° сваки војник је нижи од свих војника који се налазе иза њега (у осталим врстама);
 - 2° сваки војник је нижи од свих војника који се налазе десно од њега (у његовој врсти);
 - 3° у последњој врсти се налазе 4 највиша војника.

На колико начина капетан то може учинити?

2009. Opštinsko takmičenje

Први разред, А категорија

1. Нека је X унутрашића тачка троугла ABC , а T његово тежиште. Нека су M, N тачке које припадају страници BC , P, Q тачке које припадају страници CA , R, S тачке које припадају страници AB , тако да важи $MQ \parallel AB$, $PS \parallel BC$, $RN \parallel CA$ и $MQ \cap PS \cap RN = \{X\}$. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи MN, PQ, RS , редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{XT}.$$

2. Од 16 људи, међу којима су по 4 из Србије, Румуније, Бугарске и Македоније, треба изабрати 6.

- (а) Колико има таквих избора у којима је заступљена свака земља?
(б) Колико има таквих избора у којима нема више од два представника неке земље?

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

4. Да ли постоји бијекција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(x)) - f(x) = 56x + 2008?$$

5. Нека је S средиште дужи AB , а C и D тачке које припадају полуокружници над пречником AB , тако да C припада луку AD и да је $\angle CSD = 90^\circ$. Нека је E пресечна тачка правих AC и BD , а F пресечна тачка правих AD и BC . Доказати да вектор \overrightarrow{EF} не зависи од избора тачака C и D .

Први разред, Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n такве да је $\frac{2n+1}{n+2}$ природан број.

2. Нека је $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$.

- (а) Одредити функцију f ако је $f(x) = g(g(x)) - g(x)$.
(б) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. У зависности од A и B одредити које од следећих скуповних формула су тачне:

- (а) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$; (б) $A \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;
(в) $A \cap B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$; (г) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$;
(д) $A \cup B = A \Rightarrow A \subseteq B$.

4. За које вредности реалног параметра a једначина $||x| - 1| = a$ има максималан број различитих реалних решења?

5. Видети трећи задатак за први разред А категорије.

2009. Okružno takmičenje

Први разред, А категорија

1. Нека су M и N различите тачке које не припадају правој p . Ко-
иструисати троугао ABC , такав да страница AB припада p , а тачке M
и N су подножја висина из темена A и B , редом.

2. Нека су p, q, r реални бројеви за које важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$ и $p+q+r = 1$.
Доказати да за све реалне a, b, c важи

$$a^2 + b^2 + c^2 = (pa + qb + rc)^2 + (qa + rb + pc)^2 + (ra + pb + qc)^2.$$

3. За сваку тачку првог квадранта одредити праву која пролази кроз
ту тачку, а са позитивним деловима координатних оса гради троугао
минималне површине.

4. Одредити све природне бројеве n за које је тачно тврђење:

Природан број x делјив је са n ако и само ако је збир цифара
броја x делјив са n .

5. Два тима, сваки са по 6 фудбалера, имају па располагају 4 шортса
и 4 мајице, у свакој од следећих боја – црвеној, плавој и белој. На
колико начина фудбалери могу да се обуку за утакмицу тако да сваки
фудбалер обуче шортс и мајицу, ако се зна да сваки тим мора да има
своју карактеристичну боју?

Напомена. Боја је карактеристична за тим ако сваки играч тог тима
има бар један одевни предмет те боје, а да притом нико из супротног
тима нема ниједан одевни предмет те боје.

Први разред, Б категорија

1. Доказати да је број $2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} + \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2}$ рационалан.

2. Нека су D и E тачке које припадају хипотенузи BC правоуглог
троугла ABC , тако да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати $\angle DAE$.

3. Колико целобројних решења има једначина $|x| + |y| = 2009$?

4. Нека је r полупречник уписане кружнице, а h висина која одговара
хипотенузи правоуглог троугла. Доказати да важи $\frac{2}{5} < \frac{r}{h} < \frac{1}{2}$.

5. На колико начина се 20 карата, међу којима су четири даме, може
поделити на две групе од по 10 карата, тако да у једној групи буде
три даме, а у другој једна дама?

2009. Republičko takmičenje

Први разред, А категорија

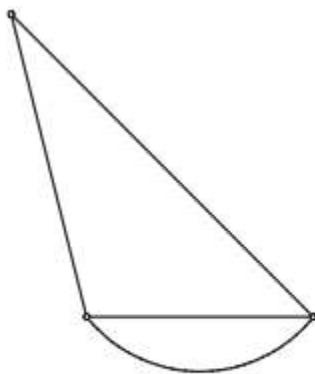
1. Колико има функција $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ таквих да за свако $x \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} ?$$

2. Нека тачка C припада дужи AB и нека су k_0 , k_{01} и k_{02} кругови чији су пречници AB , AC и CB , редом. Нека је D тачка пресека кружница k_0 и нормале кроз C па дуж AB . Нека су k_1 и k_2 кругови који се налазе у истој полуравни одређеној правом AB у којој и тачка D и који додирују, редом, кружнице k_{01} , k_0 и дуж CD , односно кружнице k_{02} , k_0 и дуж CD . Нека је k круг најмањег полупречника који садржи и додирује кругове k_1 и k_2 . Доказати да је пречник круга k једнак дужини дужи CD .

3. На кружници је уочен коначан број лукова, таквих да је дужина сваког од њих мања од полуобима кружнице и да свака три од њих имају непразан пресек. Доказати да постоји тачка кружнице која се не налази ни па једном луку.

4. Конструисати барем једну праву која фигуру са слике, састављену од троугла и кружног одсечка, дели па два по површини једнака дела.



5. Да ли постоји природан број који је потпуни квадрат и чији је збир цифара једнак 2008^{2009} ?

2009. Republičko takmičenje

Прави разред, Б категорија

1. Одредити остатак при дељењу броја $5^{102} + 4^{99} + 3^{100}$ са 13.
2. Нека су V, S, T различите тачке равни. Конструисати троугао ABC , тако да су тачке V, S и T пресечне тачке описане кружнице овог троугла са правама којима припадају висина, симетрала угла и тежишна линија које одговарају темену C , редом.
3. Доказати да за све реалне x и y важи неједнакост
$$x^2y^4 + 2 \cdot (x^2 + 2) \cdot y^2 + 4xy + x^2 \geq 4xy^3.$$
4. Нека је ABC тупоугли троугао ($\angle ABC > 90^\circ$) и нека је R полу-пречник описане кружнице овог троугла. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C секу праву AB у тачкама L и M , редом. Ако је $CL = CM$, доказати да је $4R^2 = AC^2 + BC^2$.
5. На колико начина је могуће у свако поље табеле са две врсте и 2009 колона уписати природан број не већи од 2803, тако да ни у једној колони већи број не буде изнад мањег.

2010. Opštinsko takmičenje

Први разред, А категорија

1. Нека су T_1 и T_2 тежишта $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3 \cdot \overrightarrow{T_1T_2}.$$

2. Природан број n даје остатак 35 при дељењу и са 2009 и са 2010. Колики је остатак броја n при дељењу са 42?

3. Нека је CD симетрала $\angle BCA$ троугла ABC ($D \in AB$) и $AC + BD = BC + AD$. Доказати да је $\triangle ABC$ једнакокрак.

4. Да ли број $2010^{2010} + 10^{2011}$ има већи број цифара у декадном запису од броја 2010^{2010} ?

5. Свако од јединичних поља таблице 3×3 обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна јединична поља (тј. поља са заједничком страницом) различите боје?

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи:

1° $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

2° $2 \in A \setminus B$,

3° $3 \in B \setminus A$,

4° $A \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$ и

5° $B \cap \{1\} = \emptyset$.

2. Нека је $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $g(5 - 2x) = 4x - 7$.

- (а) Одредити $g(x)$.

- (б) Одредити функцију f , ако је $f = g \circ g$.

- (в) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је број $n(n - 3)(n^2 - 3n + 14)$ делив са 8.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Видети пети задатак за први разред А категорије.

2010. Okružno takmičenje

Први разред, А категорија

1. Нека су $x, y, z \in \mathbb{N}$ за које важи $x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$ и $x^2 = 2(y + z)$. Одредити $x + y + z$.

2. Доказати или оповргнути тврђење:

За сваки природан број n постоји природан број x који је делив са n , збир цифара му је једнак n и у декадном запису се завршава пизом цифара које чине декадни запис броја n .

3. Нека је ABC оштроугли троугао. Кружница k , над пречником AB , сече странице AC и BC у тачкама M и N , редом. Тангенте кружнице k у тачкама M и N секу се у тачки P . Ако је $CP = MN$, одредити $\angle BCA$.

4. У $\triangle ABC$ у коме је $BC \neq CA$ тачке H, T и O су ортоцентар, тежиште и центар описане кружнице, редом. Нека су тачке P и Q симетричне тачкама T и H , редом, у односу на O . Нека је D средиште AB , R тежиште $\triangle ABQ$ и U пресек правих OD и RT . Доказати да је U тежиште $\triangle DPT$.

5. На колико начина шест парова може да седне у ред биоскопа који има 20 места, ако сваки пар жели да седне на суседна места?

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи:

1° $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

2° $2 \in A \setminus B$,

3° $3 \in B \setminus A$,

4° $A \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$ и

5° $B \cap \{1\} = \emptyset$.

2. Нека је $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $g(5 - 2x) = 4x - 7$.

- (а) Одредити $g(x)$.

- (б) Одредити функцију f , ако је $f = g \circ g$.

- (в) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је број $n(n - 3)(n^2 - 3n + 14)$ делив са 8.

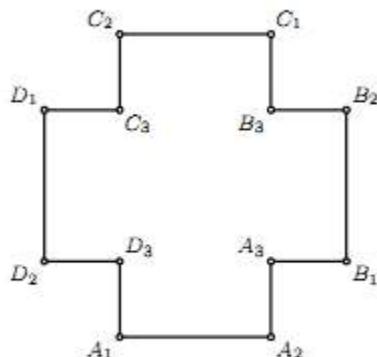
4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Видети пети задатак за први разред А категорије.

2010. Republičko takmičenje

Први разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$ је $\angle ABC = 80^\circ$. Тачка D на страници BC је таква да важи $AB = AD = CD$, тачка F на страници AB је таква да важи $AF = BD$ и тачка E на правој BC је таква да важи $B - C - E$ и $\angle BEF = 20^\circ$. Доказати да је $DE = AC$.
2. Четвороугао $ABCD$ је трапез ($AB \parallel CD$) у који се може уписати круг. Доказати да се кружница над пречником BC и кружница над пречником AD додирују.
3. Нека је $n > 1$ природан број. Колико има n -тоцифренх бројева који су палиндроми и дељиви су са 9 (број је палиндром уколико му је декадни запис симетричан, тј. запис му је исти слева на десно и здесна на лево)?
4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за неке просте бројеве $p < q < r$ важи $\{P(p), P(q), P(r)\} = \{20, 3, 2010\}$. Доказати да је $P(p+q) = 2010$.
5. Може ли се унутар фигуре са слике ДР 10 1A 5-1 (укључујући руб) сместити девет тачака, међу којима никоје три нису колинеарне, тако да кадгод неке три од њих образују троугао који припада унутрашњости фигуре, његова површина је већа од 2 ($A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 2$, $A_2A_3 = A_3B_1 = B_2B_3 = B_3C_1 = C_2C_3 = C_3D_1 = D_2D_3 = D_3A_1 = 1$)?



ДР 10 1A 5-1

2010. Republičko takmičenje

Први разред, Б категорија

1. Нека је $f(x) = -\frac{2x+7}{x+3}$ и $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n\text{-пута}}$, за $n \in \mathbb{N}$. Одредити $f_{2009}(2010)$.
2. На колико се начина број 2010 може представити као збир неколико (бар два) узастопних природних бројева?
3. Ако је $a, b > 0$ и $a + b = 2$, доказати да је $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} < 3$.
4. У $\triangle ABC$ угао код темена B је двоструко већи од угла код темена A , а тежишица дуж CM је нормална на симетралу $\angle ABC$. Одреди углове $\triangle ABC$.
5. Симетрале AA_1, BB_1, CC_1 угла $\triangle ABC$ секу се у тачки S ($A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$). Ако су полупречници кружница уписаных у троуглове $SAB_1, SB_1C, SCA_1, SA_1B, SBC_1, SC_1A$ једнаки, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

2011. Opštinsko takmičenje

Први разред, А категорија

1. Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар троугла ABC , а G_1 , G_2 и G_3 тежишта троуглова HBC , HCA и HAB , редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OH}.$$

2. На колико начина је могуће распоредити 11 птица у 3 идентична кавеза, тако да сваки кавез садржи бар три птице?

3. Дата је таблица димензије 2010×2011 . Одредити максималан број поља који можемо обојити тако да сваки квадрат димензије 2×2 (сстављен од поља таблице) садржи највише два обојена поља.

4. За природан број k са $S(k)$ означен је збир његових цифара. Да ли постоје природни бројеви n и m за које важи

$$S(n) \cdot S(n+1) \cdot \dots \cdot S(n+m) = 2011^{2010}?$$

5. Нека су M и P подножја нормала из темена A троугла ABC на симетрале спољашњих углова код темена B и C , редом. Доказати да је дужина дужи MP једнака половини обима троугла ABC .

2011. Opštinsko takmičenje

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B ако важи:

$$1^{\circ} A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\};$$

$$2^{\circ} A \cap B = \{a\};$$

$$3^{\circ} B \cap \{c, i\} = \emptyset;$$

$$4^{\circ} B \setminus A = \{d, e, f, g, h\}.$$

2. Дат је скуп $M = \{25, 53, 71, 74\}$ и релација ρ :

$x\rho y \Leftrightarrow$ цифра десетица броја x је мања од цифре једицица броја y .

Направити таблицу релације ρ у скупу M и испитати која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ у скупу M .

3. На колико начина 20 људи може сести на 20 места једног реда у биоскопу, тако да Ана седи поред Бојана, а Весна поред Горана?

4. Познато је да је

$$5^{20} \cdot 20^5 = 30517578*****\dots,$$

при чему свака звездица представља по једну цифру. Одредити цифре уместо којих се налазе звездице.

5. Дата су пресликавања $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ако је } n \text{ паран} \\ n-1, & \text{ако је } n \text{ непаран} \end{cases} \text{ и } g(n) = \begin{cases} 2n, & \text{ако је } n \text{ паран} \\ 3n, & \text{ако је } n \text{ непаран} \end{cases}.$$

а) Одредити $(f \circ g)(2010)$ и $(g \circ f)(2011)$.

б) Одредити $(f \circ g)(n)$ и $(g \circ f)(n)$.

2011. Okružno takmičenje

Први разред, А категорија

1. Да ли постоје природни бројеви a, b, c такви да је

$$2010 = (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)?$$

2. У равни су дате кружнице k_1 и k_2 и права p која сече k_1 у тачкама A и B , а k_2 у тачкама C и D . Пресечне тачке тангенти кружнице k_1 у тачкама A и B са тангентама кружнице k_2 у тачкама C и D су K, L, M и N . Доказати да су K, L, M и N концикличне тачке.

3. Одредити све природне бројеве n такве да је број

$$\left| n - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right| + \left| 3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} \right|$$

рационалан.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AB = BC$) је одабрана тачка M таква да је $\angle AMC = 2\angle ABC$. Тачка N на дужи AM задовољава $\angle BNM = \angle ABC$. Доказати да је $BN = CM + MN$.

5. Фигура површине веће од 1006 може се сместити у правоугаоник димензија 2011×1 . Доказати да постоје две тачке те фигуре (на рубу или унутрашњости) које су па растојању тачно 1.

2011. Okružno takmičenje

Први разред, Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$|x - 1| - |x - 2| + |x - 3| = a$$

има тачно четири реална решења?

2. На страницима AB и BC паралелограма $ABCD$ дате су тачке M и N тако да је $AM : MB = 2 : 1$ и $BN : NC = 1 : 1$. Ако је S пресечна тачка дужи AN и DM , наћи однос $AS : SN$.

3. Три друга Аца, Бојан и Вељко погађају непознат шестоцифрен број, састављен од цифара 1,2,3,4,5,6, при чему се ове цифре не попављају. Они дају следеће претпоставке за непознат број:

- Аца: 123456.
- Бојан: 245163.
- Вељко: 463215.

Ако се зна да је Аца погодио тачан положај 3 цифре, Бојан 3 цифре и Вељко 1 цифре, одредити непознати број.

4. Видети први задатак за први разред А категорије.
5. Дат је паралелограм $ABCD$. Нека су $ABB'A'$, $BCC''B''$ и $CDD'C'$ квадрати конструисани у спољашњости овог паралелограма и нека су O_1 , O_2 и O_3 њихови центри, редом. Доказати да су троуглови O_1BO_2 и O_3CO_2 подударни.

2011. Republičko takmičenje

Први разред, А категорија

1. Перица покушава да пронађе $2n+1$ најмањих узастопних природних бројева, тако да је збир квадрата најмањих $n+1$ бројева једнак збиру квадрата највећих n бројева. Уколико овакви бројеви постоје, Перица их записује у n -ту врсту своје пирамиде, а уколико такви не постоје,

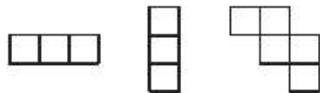
n -та врста остаје празна. Након прва три корака ($n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$) Перицина пирамида има следећи изглед

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2. \end{aligned}$$

Кажемо да се бројеви 3, 4 и 5 налазе у првој врсти; бројеви 10, 11, 12, 13 и 14 се налазе у другој врсти; бројеви 21, 22, 23, 24, 25, 26 и 27 се налазе у трећој врсти. Уколико Перица настави са прављењем пирамиде па описани начин, да ли ће се у некој врсти наћи број 2011?

2. Нека су H и O редом ортоцентар и центар описане кружнице троугла ABC ($AB \neq AC$). Праве AH и AO секу описану кружницу троугла ABC по други пут у тачкама M и N , редом. Означимо са P , Q , R пресечне тачке правих BC и HN , BC и OM , HQ и OP , редом. Доказати да је четвороугао $AORH$ паралелограм.

3. За природан број кажемо да је *симетричан* ако се у декадном систему исто пише са лева на десно и са десна на лево. Доказати да постоји бескапачно много природних бројева n таквих да су бројеви n^2 , n^3 и n^4 симетрични, а број n^5 није.
4. За које природне бројеве m и n се правоугаоник димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) фигурама састављеним од јединичних квадрата као на слици? Фигуре се не могу ротирати или окретати.



2011. Republičko takmičenje

Први разред, Б категорија

1. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Уколико су A_1, B_1, C_1 и D_1 средишта лукова над тетивама AB, BC, CD, DA , редом, који не садрже неку од преосталих тачака, доказати да је $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

2. Одредити цифру једицина и цифру десетица броја

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2009 \cdot 2011.$$

3. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао, P и Q средишта редом странича BC и EF и тачка T пресек дужи AP и BQ . Одредити $AT : TP$ и $BT : TQ$.

4. У зависности од реалног параметра a одредити сва реална решења једначине

$$3(1 + a + a^2) \cdot x = (1 + a + a^2)^2 \cdot x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1.$$

5. Раван је обојена у две боје. Доказати да постоји троугао са странима дужина 1 cm, $\sqrt{3}$ cm и 2 cm чија су сва темена исте боје.